Ad-soyad :

Numara :

Lineer Cebir II Final Sınavı Cevap Anahtarı **17.06.2022**

NOT : 6. soruyu isteyenler çözebilir. Süre 90 dakikadır. Başarılar.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(Y) $\det A = 0$ ise $AX = B$ lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır (4 p).

(Y) Bir kare matriste iki satır yer değiştirirse determinant değişmez (4 p).

(D) Bir kare matriste bir satırın belli bir katı başka bir satıra eklenirse determinant değişmez (4 p).

(Y) Matris çarpımı değişme özelliğine sahiptir (4 p).

(D) Homojen lineer denklem sistemleri her zaman çözülebilir (4 p).

2) $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini bulunuz (20 p).

3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 12 \end{cases}$ lineer denklem sistemini çözünüz (20 p).

4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. det A=0 olması için $x \in \mathbb{R}$ ne olmalıdır (20 p)?

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) $\operatorname{adj}A = ?$ (A nın eki) (8 p).

b) detA=? (8 p).

c) A nın tersi var mıdır? Varsa $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj}A$ formülünü kullanarak A^{-1} i bulunuz (4 p).

6) $A, B \in \mathbb{R}_n^n$ olmak üzere $A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$ olduğunu gösteriniz (10 p).

($(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ olduğuna dikkat ediniz)

2) $\det(xI-A)=\begin{vmatrix} x-3/2 & -2 \\ 1 & x+3/2 \end{vmatrix} = (x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})+2 = x^2-\frac{9}{4}+2 = x^2-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow x=\mp\frac{1}{2}$

özdeğerler

$\frac{1}{2}$ için öz vektörleri: $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ olsun. $A(X)=\frac{1}{2}X$ olacak şekilde $X\neq 0$ vektörlerini bulacağız.

$$AX=\frac{1}{2}X \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3/2 & 2\\ -1 & -3/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\frac{3}{2}x_1+2x_2\\ -x_1-\frac{3}{2}x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x_1\\ \frac{1}{2}x_2\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}\frac{3}{2}x_1+2x_2=\frac{1}{2}x_1\\ -x_1-\frac{3}{2}x_2=\frac{1}{2}x_2\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_1+2x_2=0\\ -x_1-2x_2=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{S_1+S_2}\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$$

$x_2=t$ dersek $x_1+2x_2=0 \Rightarrow x_1=-2x_2=-2t$

O halde, $\frac{1}{2}$ için öz vektörler $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}, t\neq 0$ şeklindedir.

$-\frac{1}{2}$ için özvektörler benzer şekilde $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}, t\neq 0$ şeklindedir.

3) Sistemin ilaveli katsayılar matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{array}\right]\xrightarrow[-9S_1+S_3]{-5S_1+S_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-8&-16&-24\end{array}\right]\xrightarrow{-2S_2+S_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{1}{4}S_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2S_2+S_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{array}\right] \Rightarrow$$ x, y temel, z serbest değişken. $z=t$ dersek

$x-z=-2 \Rightarrow x=t-2$

$y+2z=3 \Rightarrow y=3-2z=3-2t$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t-2\\3-2t\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\-2t\\t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$ şeklinde bir parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

4) $\det A=\begin{vmatrix}0&1&1&x\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\x&1&1&0\end{vmatrix} = 0.|\cdots| -1\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\x&1&0\end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\x&1&0\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\x&1&1\end{vmatrix}$ (1. satıra göre)

$= -1(x+\cancel{1}-\cancel{1})+1.(\cancel{1}-x-\cancel{1})-x(2-x)$

$= -x-x-2x+x^2 = x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0, x=4$

5) a) $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$A_{21}=-5$, $A_{22}=1$, $A_{23}=0$, $A_{31}=12$, $A_{32}=-2$, $A_{33}=-1$

$\Rightarrow \operatorname{adj}A=\tilde{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 0\\ 12 & -2 & -1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-1 & -5 & 12\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

b) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1((-1).1-0.2)=-1$

c) $\det A\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ vardır. $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}=\begin{bmatrix}1 & 5 & -12\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

6) $A+B=P$ olsun. $B=P-A$

$A(A+B)^{-1}B=AP^{-1}(P-A)=(AP^{-1})P-(AP^{-1})A=A\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}-(AP^{-1}A)=A-AP^{-1}A$

$B(A+B)^{-1}A=(P-A)P^{-1}A=P(P^{-1}A)-A(P^{-1}A)=\underbrace{(PP^{-1})}_{I}A-AP^{-1}A=A-AP^{-1}A$

$\Rightarrow A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$